

БАЛАНСИРОВКА ДЕРЕВЬЕВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭНТРОПИЙНОГО КОДИРОВЩИКА

Сжатие данных при энтропийном кодировании достигается за счет существования вероятностных взаимосвязей между символами входного потока. Поскольку в случае онлайн-варианта (однопроходного) алгоритма на каждом шаге его работы вероятностное распределение символов априорно неизвестно, осуществляется накопление статистических данных в так называемой вероятностной модели, идентичность которой у кодера и декодера гарантирует корректное выполнение адаптивного сжатия. [1]

Традиционно статистическая модель строится на основании структуры двоичного дерева поиска (Binary Search Tree, BST).

Структура двоичного дерева поиска и, следовательно, эффективность операций, производимых с ним, сильно зависит от того, в каком порядке в него добавляются узлы. К примеру, если на вход поступают символы по порядку, начиная с самого малого, то дерево вырождается в линейный односвязный список, т.к. каждый узел будет иметь правого потомка, но не иметь левого. Как известно, среднее время выполнения операций с односвязным списком пропорционально $O(n)$.

Во избежание подобных ситуаций разработано много методов балансировки деревьев по высоте: RBT (Red-Black Trees, красно-черные деревья), AVL-деревья и другие. В этих методах к структуре дерева применяются эквивалентные преобразования, называемые вращениями, которые улучшают сбалансированность дерева и оптимизируют операции над ним. Эти эквивалентные преобразования называются вращениями деревьев. Каждая реализация сбалансированных по высоте деревьев отличается своими критериями необходимости вращения.

Применительно к задаче накопления статистики в дереве вероятностей традиционные критерии вращений для балансировки по высоте неприемлемы, поскольку узлы дерева вероятностей неравнозначны и неравновероятны по своей востребованности. Они обладают таким свойством как вес (приоритет). При этом узлы, имеющие больший вес, ищутся в дереве большее количество раз, меньший – меньшее. Очевидна необходимость минимизировать путь спуска до самых тяжелых узлов дерева, сделав его длину обратно пропорциональным весу узлов дерева.

В данной статье описаны разработанные методы балансировки деревьев по весу, а также рассчитаны критерии вращений.

Разработаны методы малого и большого вращений.

Любое вращение в дереве заключается в замене связующих указателей нескольких соседних узлов. При этом в малом вращении эти узлы являются соседними, в большом – могут отстоять друг от друга на некоторое расстояние.

На приведенных ниже рисунках кругами обозначены узлы дерева, а прямоугольными треугольниками – левые или правые поддеревья соответственно направленности треугольника. Поддеревья могут быть как одиночными узлами, так и их древовидными совокупностями. Каждый элемент дерева подписан некоторой буквой латинского алфавита, которые отражают лексикографический порядок, установленный в BST. На рисунках приведены примеры малого правого и большого левого вращения, симметричные им вращения исполняются по той же схеме и имеют тот же эффект.

Малое вращение по принципу исполнения эквивалентно вращению AVL-деревьев [2] и схематически представлено на рисунке 1.

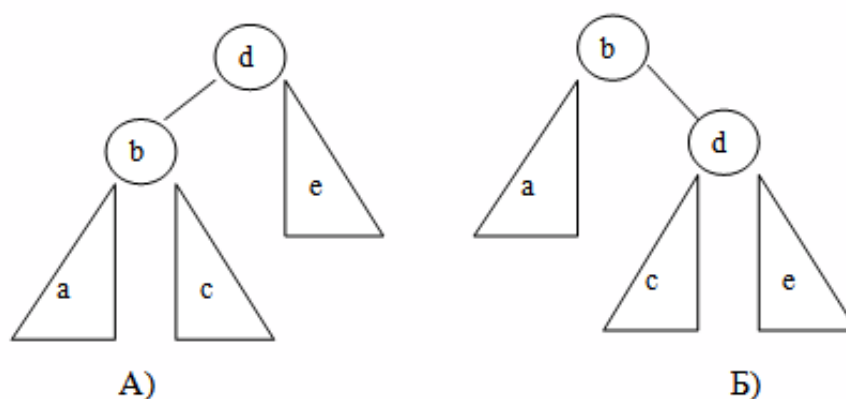


Рис. 1 Малое правое вращение
А) Структура дерева до вращения
Б) Структура дерева после вращения

Критерий малого правого вращения:

$$|P_a + P_b + P_c - P_e| > |P_c + P_d + P_e - P_a|,$$

где P_i – вес i -го узла или поддерева.

Большое вращение целесообразно применять тогда, когда критерии малого вращеня не выполняются, но дерево не является сбалансированным. Большое вращение отличается от малого тем, что в нем задействуется большее количество промежуточных узлов дерева. Результат его осуществления, тем не менее, менее радикален, по сравнению с малым вращением, поскольку в другое поддереву переносится по возможности меньший вес.

Таким образом, большие вращения стремятся сделать дисбаланс поддеревьев минимальным.

Большое вращение потенциально может проводиться тогда, когда мы следуем несколько переходов подряд в одном и том же направлении вниз по дереву (направо или налево).

После потенциального большого вращения все узлы лексикографически левее текущего переносятся в левое поддерево, сам он исключается из расчетов, а все остальные узлы дерева – в правое поддерево текущего узла.

Соответственно, когда мы спускаемся еще на один узел влево, мы вычитаем его из разбиения прошлого потенциального большого вращения и исключаем из расчетов вообще. Левая ветка становится легче на этот узел, правая – тяжелее на его правое поддерево, если оно есть.

Помимо этого, мы включаем в расчет нового разбиения корень предыдущего разбиения. Но, поскольку он расположен правее корня текущего, мы включаем его в правое поддерево, которое утяжеляется. Левое не изменяется.

Таким образом, все перераспределения масс у нас монотонно делают легче левое поддерево и тяжелее – правое.

Для проверки необходимости большого вращения на спуске последовательно вычисляются разницы весов левых и правых поддеревьев, и, когда разница меняет знак, анализируются модули двух ближайших разниц. Если модуль меньшей по модулю разницы меньше модуля разницы текущего разбиения, выполняется большое вращение.

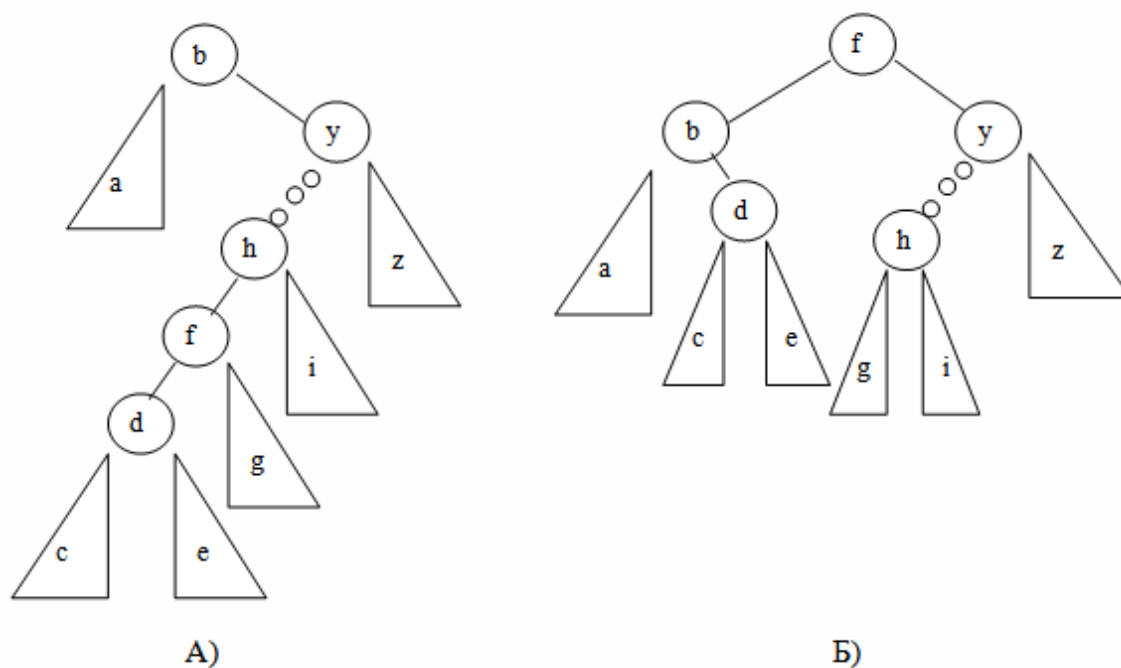


Рис. 2 Большое левое вращение:
 А) Структура дерева до вращения
 Б) Структура дерева после вращения

Критерии большого левого вращения (рисунок 2):

$$|P_a + P_b + P_c + P_d + P_e - (P_g + P_h + P_i + \dots + P_y + P_z)| < |P_a + P_b + P_c + P_d + P_e + P_f + P_g - (P_i + \dots + P_y + P_z)|$$

$$|P_a + P_b + P_c + P_d + P_e - (P_g + P_h + P_i + \dots + P_y + P_z)| < |P_a + P_b + P_c - (P_e + P_f + P_g + P_h + P_i + \dots + P_y + P_z)|$$

Первое неравенство означает преимущество разбиения дерева относительно узла f как корня перед разбиением относительно h, второе – перед разбиением относительно узла d. При выполнении обоих критериев осуществляется большое вращение.

Библиографический список

1 Аксенов А.В. Разработка адаптивного алгоритма энтропийного кодирования, Сборник докладов Научной сессии ГУАП, посвященной Всемирному дню космонавтики, СПб, ГУАП, 2010 г.
 2 Ахо А. В., Хопкрофт Д. Э., Ульман Д. Д. Структуры данных и алгоритмы: Пер. с англ.: учеб. пособие. М: Издательский дом «Вильямс», 2000, 384 с.